



کاربرد روش‌های باز نمونه‌گیری در نمودارهای کنترل جمع تجمعی

چندمتغیره

عبدالرسول مستاجران (نویسنده مسؤل)

گروه علوم پایه، واحد شاهین شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، شاهین شهر، ایران

Email: rasoul.mostajeran@gmail.com

امیرحسین آفاجانی

کارشناس ارشد آمار، سازمان مدیریت و برنامه ریزی کشور

تاریخ دریافت: ۹۴/۹/۱۹ * تاریخ پذیرش: ۹۵/۴/۲۸

چکیده

یکی از ابزارهای مهم کنترل فرآیند، نمودارهای کنترل هستند. نمودارهای کنترل شوهارت فقط از اطلاعات آخرین نمونه استفاده می‌کنند، لذا فاقد حافظه هستند و قادر به تشخیص انحرافات کوچک نیستند. همچنین، نمودارهای کنترل شوهارت چندمتغیره اغلب بر اساس فرض نرمال بودن مشاهدات به کار می‌رود که در عمل ممکن است برقرار نباشد. نمودارهای کنترل جمع تجمعی چندمتغیره (mcusum) یکی از پرکاربردترین ابزارهای کنترل فرآیند آماری چندمتغیره در کنترل کیفیت می‌باشد. نمودار کنترل جمع تجمعی چندمتغیره از عیوب نمودارهای شوهارت مبرا است. این نمودار دارای حافظه است و نسبت به انحرافات کوچک حساس است. تعیین توزیع دقیق و حدی آماره نمودار کنترل جمع تجمعی برداری چندمتغیره به دلیل ساختار آن حتی تحت فرض نرمال بودن توزیع داده‌ها مشکل است و به همین علت از طریق شبیه‌سازی، توزیع آن را تعیین می‌کنند. نمودارهای کنترل بوت‌استرپ بدون نیاز به معلوم بودن توزیع داده‌ها، بر اساس باز نمونه‌گیری از مشاهدات (داده‌های اصلی) است. در این مقاله برای اولین بار کاربرد روش‌های باز نمونه‌گیری در نمودارهای کنترل جمع تجمعی چندمتغیره ارائه می‌گردد. چهار الگوریتم متفاوت باز نمونه‌گیری معرفی شده است. الگوریتم‌ها با استفاده از معیار ARLO در مطالعات شبیه‌سازی مقایسه شده اند. کد برنامه‌های شبیه‌سازی در برنامه R نوشته و اجرا گردیده است. در نهایت یک مثال واقعی که مطالعه موردی در کارخانه قند شهر اصفهان بوده، ارائه شده است.

کلمات کلیدی: روش‌های باز نمونه‌گیری، بوت‌استرپ، نمودار کنترل جمع تجمعی چندمتغیره، متوسط طول دنباله (ARL)

۱- مقدمه

کنترل فرآیند آماری به طور گسترده‌ای در کنترل کیفیت مورد استفاده قرار می‌گیرد. یکی از ابزارهای مهم کنترل فرآیند آماری، نمودارهای کنترل هستند. نمودار کنترل جمع تجمعی (cusum) در شناسایی تغییر کیفیت محصولات تولیدی مورد استفاده قرار می‌گیرد. بیشترین کاربرد این نوع نمودار برای تشخیص و شناسایی تغییر مکان کیفیت محصولات می‌باشد. در واقع نمودار جمع تجمعی مبتنی بر نسبت درستی می‌باشد که برای شناسایی خروج از کنترل فرآیند محصولات تولیدی مورد استفاده قرار می‌گیرد. ایده اولیه نمودار کنترل یک متغیره جمع تجمعی توسط پیچ (Page, 1954) ارائه شده است که در کتاب مونته‌گمری (Montgomery, 2006) موجود است. تاثیر برآورد پارامترهای مورد نیاز در فرآیند استفاده از نمودارهای کنترل یکی از مسائلی بوده که همواره توجهات زیادی را به خود معطوف کرده بوده است (Albers and Kallenberg, 1997, 1998; chen, 2004; Albers et.al 2004) دو مشکل اساسی در کاربرد نمودار کنترل جمع تجمعی برداری یک متغیره وجود دارد که عبارت است از

۱. فرض‌های مرتبط با این نمودار باید ساده در برابر مرکب در نظر گرفته شود ولی به دلیل پیچیدگی و دشواری انجام آزمون‌های مرتبط با آن، فرض ساده در برابر ساده مورد استفاده قرار می‌گرفت (Mood, Graybill and Boes, 1974).

۲. با وجود در نظر گرفتن فرض ساده در برابر ساده همچنان ساختار آماره مرتبط با این نمودار بسیار پیچیده می‌باشد به طوری که تنها در حالت نرمال بودن توزیع مشاهدات، توزیع آماره قابل محاسبه می‌باشد.

چاترجی و کیو (Chatterjee and Qiu, 2009) از بوت استرپ برای محاسبه حدود کنترل جمع تجمعی یک متغیره استفاده کردند. با توجه به اینکه معمولاً یک محصول دارای چندین مشخصه کیفی است لذا برای بررسی کنترل فرآیند اگر از نمودارهای کنترل یک متغیره استفاده شود به دلیل در نظر نگرفتن همبستگی بین متغیرها منجر به خطا خواهد شد. بنابراین از نمودارهای کنترل چند متغیره استفاده می‌شود. ودال و انکیوب (Woodall and Ncube, 1985) پیشنهاد تعمیم نمودار کنترل یک متغیره جمع تجمعی به چند متغیره را دادند که علاوه بر مشکلات فوق پیچیدگی‌های چند متغیره نیز در کاربرد این نمودار بروز پیدا می‌کرد. علاوه بر ودال و وانکیوب در متون کنترل فرآیند آماری، نمودار کنترل یک متغیره جمع تجمعی به روش‌های مختلفی به حالت چند متغیره تعمیم داده شده است. تعمیم‌های انجام شده شامل تحقیقات هلی (Healy, 1987)، کروزر (Crosier, 1988)، پیگنتالیو و رانجر (Pignatiello and Runger, 1990) و ناگی و ژانگ (Nagi and Zhang, 2001) می‌باشد. کروزر عملکرد نمودار کنترل جمع تجمعی چند متغیره (MCUSUM) و نمودار COT را مقایسه نمود کیو و هاوکینز (Qiu and Hawkins, 2001) کاربرد نمودار کنترل تجمعی را در حالتیکه متغیرهای مورد بررسی چند متغیره هستند بررسی کردند. پیگنتالیو و رانجر دو نوع نمودار کنترل جمع تجمعی MC1 و MC2 را پیشنهاد کردند و عملکرد این دو نمودار را با نمودار پیشنهادی ودال و انکیوب که استفاده همزمان از چند نمودار کنترل جمع تجمعی یک متغیره بود، مقایسه کردند. انگی و ژانگ نمودار کنترل جمع تجمعی چند متغیره را از طریق پروجکشن توسعه دادند و با نمودارهای MC1، MC2 و MEWMA مقایسه کردند.

دانکن (Duncan, 1974) تحلیل کاملی از نمودار کنترل جمع تجمعی تحت فرض نرمال بودن توزیع متغیرهای مورد مطالعه ارائه کرده است. هلی مطالعاتی در خصوص مجموع تجمعی چند متغیره تحت فرض نرمال بودن توزیع متغیرها انجام داد. در حالتی که هدف شناسایی تغییر مکان کیفیت محصولات تولیدی است (وقتی ماتریس کوواریانس معلوم باشد) مجموع تجمعی چند متغیره به فرآیند مجموع تجمعی نرمال تک متغیره تبدیل می‌گردد. وقتی توزیع داده‌ها نرمال چند متغیره با میانگین μ و ماتریس کوواریانس Σ باشد ARL نمودار شوهارت چند متغیره (همچنین نمودار T^2 و نمودار χ^2) وابسته به پارامترهای μ و Σ (که d پارامتر غیر مرکزی) می‌باشد.

$$d = + \left[(\mu - a)' \Sigma^{-1} (\mu - a) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

که در آن بردار a مقدار هدف است.

در نمودار شوهارت چند متغیره فرآیند خارج از کنترل است اگر برای نمونه \underline{X}_n داشته باشیم

$$T_n = + \left[(\underline{X}_n - a)' \Sigma^{-1} (\underline{X}_n - a) \right]^{\frac{1}{2}} > SCL \quad (2)$$

کروزر دو نمودار برای شناسایی خروج از کنترل فرآیند پیشنهاد داد. به دلیل آن که این دو آماره در این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرد، در بخش بعد مرور خواهند شد.

- نمودار کنترل جمع تجمعی T^2 هتلینگ (Cusum of T (COT))
- نمودار کنترل جمع تجمعی برداری (Cusum of vector (CV))

در نمودارهای کنترل جمع تجمعی چندمتغیره به دلیل ساختار آماره، یافتن توزیع آن حتی تحت فرض نرمال بودن مشاهدات، بسیار سخت است و معمولاً از شبیه سازی برای به دست آوردن کران نمودار کنترل جمع تجمعی استفاده می‌کنند. راه دیگری که می‌توان برای به دست آوردن کران نمودار کنترل جمع تجمعی به کار برد، استفاده از روش‌های بازنمونه‌گیری است. نمودارهای کنترل بوت‌استرپ به توزیع مشاهدات احتیاج ندارند و همچنین با اندازه زیرگروه کوچک به خوبی عمل می‌کنند. در این مقاله با استفاده از ایده فاصله اطمینان صدکی بوت‌استرپ، چهار الگوریتم بازنمونه‌گیری برای محاسبه کران نمودار کنترل جمع تجمعی چندمتغیره در دو حالت جمع تجمعی T^2 هتلینگ و جمع تجمعی برداری ارائه کرده‌ایم که از طریق مطالعه شبیه‌سازی با دو روش کلاسیک نمودار کنترل جمع تجمعی T^2 هتلینگ و نمودار کنترل جمع تجمعی برداری مقایسه شده‌اند. در واقع هدف از این تحقیق، ارائه نمودارهای بوت‌استرپ کنترل جمع تجمعی چندمتغیره است به طوری که با محدودیت کمتر، قابلیت کاربرد و محاسبه آسان و نیز کارایی بالاتر نسبت به نمودارهای کنترل جمع تجمعی که تا به حال ارائه شده است، باشند.

در این مقاله، ابتدا در بخش ۲ نمودار کنترل جمع تجمعی برای جذر آماره T^2 هتلینگ (COT) و نمودار کنترل جمع تجمعی برداری (CV) برای مرکز فرآیند به‌طور خلاصه مرور می‌گردد. سپس در بخش ۳ الگوریتم‌های نمودار کنترل بوت‌استرپ جمع تجمعی برداری چندمتغیره ارائه می‌شوند. در ادامه در بخش ۴ مطالعات شبیه‌سازی برای مقایسه نمودارهای کنترل بوت‌استرپ با نمودارهای کنترل جمع تجمعی T^2 هتلینگ و کنترل جمع تجمعی برداری (CV) آورده شده است. در بخش ۵ یک مثال واقعی مربوط به فرآیند تولید شکر از چغندر ارائه شده است. در نهایت در بخش ۶ بحث و نتیجه‌گیری ارائه شده است. نمودار کنترل جمع تجمعی T^2 هتلینگ (COT)

ایده این روش مبنی بر جایگزینی نمودار شوهارت چند متغیره با نمودار کنترل جمع تجمعی می‌باشد. در این حالت نمودار کنترل جمع تجمعی به صورت زیر خواهد بود

$$S_n = \max(0, S_{n-1} + T_n - k) \quad (3)$$

وقتی $S_0 > 0, K > 0$. همچنین T_n از خانواده توزیع T^2 هتلینگ (Hotelling, 1947) می‌باشد. در این حالت فرآیند خارج از کنترل خواهد بود اگر $S_n > h$ (نشان دهنده مقدار بحرانی می‌باشد). کروزر مدعی شد اگرچه نمودارهای شوهارت چند متغیره مبتنی بر T_n و T^2 با یکدیگر معادل هستند ولی نمودار کنترل جمع تجمعی مبتنی بر T_n و T^2 با یکدیگر معادل نیستند.

نمودار کنترل جمع تجمعی برداری (CV)

کروزر در معرفی نمودار دوم، نمودار کنترل جمع تجمعی برداری را با جایگزینی بردار با مقدار کمی به‌دست آمده از یک نمودار کنترل جمع تجمعی یک متغیره پیشنهاد می‌کند که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$S_n = \max(0, S_{n-1} + (\underline{X}_n - a) - k\sigma) \quad (4)$$

وقتی $S_0 = 0$ و σ انحراف معیار می‌باشد. با جایگزینی بردار \underline{X}_n به جای X_n خواهیم داشت:

$$S_n = \max(0, S_{n-1} + (\underline{X}_n - a) - K) \quad (5)$$

دو مشکل اصلی برای استفاده از این رابطه، اول یافتن مقدار K و دیگری یافتن مقدار ماکسیمم بردار است. کرورز نشان داد برای محاسبه آماره مورد نظر مراحل زیر باید اجرا گردد

$$S_n = 0 \quad \text{if } C_n \leq k$$

$$S_n = (S_{n-1} + \underline{x}_n - a) \left(1 - \frac{k}{C_n} \right) \quad \text{if } C_n > k \quad (6)$$

وقتی که

$$C_n = \left[(S_{n-1} + \underline{x}_n - a)' \Sigma^{-1} (S_{n-1} + \underline{x}_n - a) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

در این حالت فرض صفر یعنی فرض تحت کنترل بودن فرآیند رد می‌شود اگر داشته باشیم $Y_n > h$ در حالی که:

$$Y_n = \left[S_n' \Sigma^{-1} S_n \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

کرورز جهت انجام محاسبات شبیه‌سازی در حالت دومتغیره، مقدار K را به ترتیب برابر با $1/41$ و $0/5$ در نظر گرفت. یکی از مشکلات این دو روش نامعلوم بودن پارامترهای مورد استفاده در این نمودارها است که موجب کاهش چشمگیر توان این دو روش در شناسایی نقاط خروج از کنترل می‌گردد.

دو فاز در نمودارهای کنترل با نام های فاز اول و فاز دوم موجود است. در فاز اول هدف اصلی بررسی مانایی فرآیند و سپس برآورد پارامترهای نامعلوم فرآیند است. در فاز دوم شناسایی هرچه سریعتر نمونه های خارج از کنترل، مدنظر است. در خصوص پارامترهای نامعلوم موجود در فرآیندهای کنترل جمع تجمعی چندمتغیره لازم به توضیح است که فرض می‌کنند پارامترها معلوم هستند ولی در عمل در دنیای واقعی این پارامترها مجهولند و باید برآورد شوند. یک رویکرد رایج، برآورد پارامترها در فاز اول به عنوان مقادیر معلوم پارامترها است. طراحی یک نمودار با این رویکرد به این معنی است که عدم اطمینان ذاتی موجود در برآوردهای فاز اول که به اندازه نمونه در فاز اول بستگی دارد نادیده گرفته می‌شود، لذا نمودار کنترل طراحی شده فاقد خواص از پیش تعیین شده است. محمود و ماراولاکیس (Mahmoud and Maravelakis, 2013) اثر رویکرد فوق را بررسی کرده‌اند و راه حلی مبتنی بر شبیه‌سازی از آماره کنترل پیشنهاد کرده‌اند. با توجه به مطالب فوق، برآورد پارامترها در این مقاله با استفاده از داده های فاز اول صورت می‌گیرد. در ادامه برای معرفی نمودارهای کنترل بوت‌استرپ جمع تجمعی چند متغیره با استفاده از روش باز نمونه‌گیری، ۴ الگوریتم مختلف ارائه می‌گردد.

۲ - مواد و روشها

الگوریتم‌های نمودار کنترل بوت استرپ جمع تجمعی چندمتغیره

فرآیندی را تصور کنید که متغیرهای کیفی مورد بررسی p متغیره باشد از طرفی با هربار مراجعه به خط تولید n نمونه به تصادف انتخاب می‌شود. پس با هربار مراجعه به خط تولید n نمونه p متغیره به تصادف انتخاب می‌شود. هدف استفاده از نموداری است که در سریع ترین زمان تغییرات با دلیل در خط تولید را شناسایی کند تا از تولید محصولات معیوب یا محصولات فاقد کیفیت لازم جلوگیری شود.

فرض کنید n نمونه p متغیره از یک فرآیند p متغیره به صورت زیر موجود است:

$$\underline{\underline{X}} = \begin{bmatrix} \underline{X}_1^t \\ \dots \\ \underline{X}_n^t \end{bmatrix}_{n \times p} = \begin{bmatrix} X_{11} \dots X_{1p} \\ \vdots \\ X_{n1} \dots X_{np} \end{bmatrix} \quad (9)$$

اگر m مرتبه نمونه هایی به اندازه n جمع آوری شود داده‌ها به صورت زیر خواهند بود

$$\underline{\underline{X}}_1, \dots, \underline{\underline{X}}_m \quad (10)$$

برای استفاده از این داده‌ها جهت یافتن حدود کنترل، میانگین هر نمونه را محاسبه می‌کنیم و با نماد

$$\underline{\underline{X}} \rightarrow \bar{X} \quad (11)$$

نشان می‌دهیم. حال با فرض اینکه در m زمان متفاوت این نمونه‌گیری انجام گرفته است داده‌ها به صورت زیر خواهند بود:

$$\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_m \quad (12)$$

در ادامه داده‌های (۱۰) را با روش بازنمونه‌گیری در جهت مشخص کردن حدود کنترل مورد استفاده قرار می‌دهیم. الگوریتم‌های زیر جهت محاسبه حدود کنترل با استفاده از روش بوت‌استرپ تعریف می‌شود. برای فهم بهتر، الگوریتم‌های معرفی شده بصورت مرحله‌ای ارائه می‌گردد.

الگوریتم I

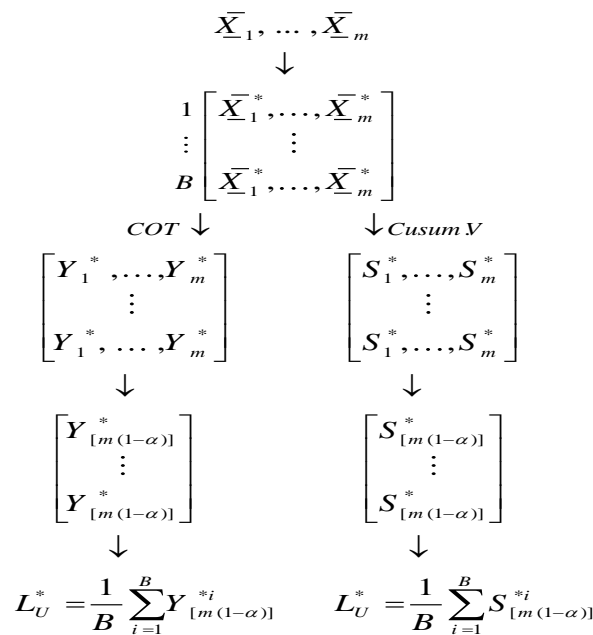
مرحله اول: از بین نمونه‌های (۱۲) m نمونه به صورت تصادفی ساده با جایگذاری انتخاب می‌کنیم. داده‌های حاصل از بازنمونه‌گیری که نمونه بوت‌استرپ نام دارد به صورت $\bar{X}_1^*, \dots, \bar{X}_m^*$ نمایش داده می‌شود.

مرحله دوم: از داده‌های بوت‌استرپ آماره‌های مربوط به روش جمع تجمعی برداری و جمع تجمعی T^2 هتلینگ که به ترتیب S_1^*, \dots, S_m^* و Y_1^*, \dots, Y_m^* می‌باشد محاسبه می‌شود.

مرحله سوم: از آماره‌های به‌دست آمده، کران صدکی بالای آماره‌ها محاسبه می‌شود.

مرحله چهارم: مراحل اول تا سوم B بار تکرار می‌شود. در نتیجه B ، کران بالای صدکی خواهیم داشت.

مرحله پنجم: میانگین کران‌های به‌دست آمده در مرحله چهارم به عنوان حد بالای کنترل بوت‌استرپ در نظر گرفته می‌شود. شکل مراحل الگوریتم یک در زیر ارائه شده است.



شکل (۱) مراحل الگوریتم یک بازنمونه‌گیری

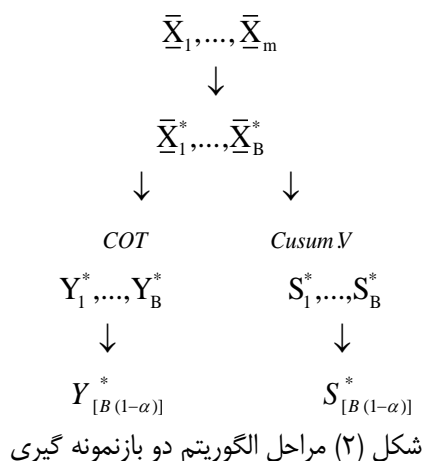
الگوریتم II

مانند قسمت قبل نمونه‌های (۱۲) را در نظر می‌گیریم.

مرحله اول: از بین نمونه‌های در نظر گرفته شده به صورت تصادفی ساده تعداد B نمونه به صورت تصادفی ساده با جایگذاری انتخاب می‌کنیم $\bar{X}_1^*, \dots, \bar{X}_B^*$.

مرحله دوم: از داده‌های به دست آمده آماره مورد نظر محاسبه می‌شود.

مرحله سوم: از آماره‌های به‌دست آمده Y_1^*, \dots, Y_B^* و S_1^*, \dots, S_B^* صدک بالای $B(1-\alpha)$ آماره متناظر را محاسبه و به‌عنوان حد بالای کنترل بوت‌استرپ در نظر گرفته می‌شود. شکل مراحل الگوریتم دو در زیر ارائه شده است.

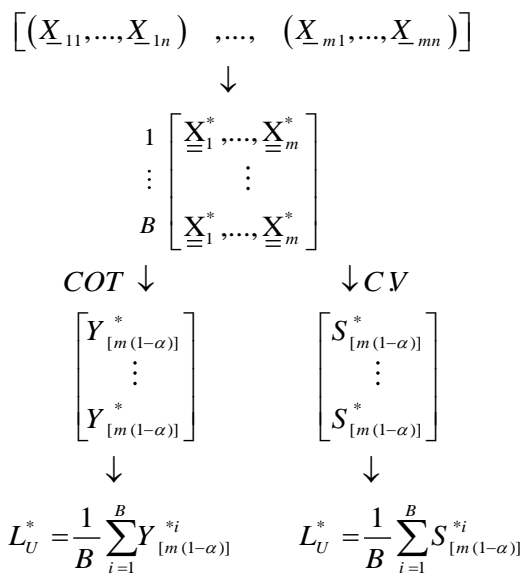


الگوریتم III

نمونه‌های (۱۰) را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\left[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m \right]_{(m \times n) \times p}^t \tag{۱۳}$$

مرحله اول: از ماتریس فوق که شامل $m \times n$ نمونه، P متغیره می‌باشد به تعداد m نمونه هریک به اندازه n به صورت تصادفی ساده با جایگذاری انتخاب کرده و آماره مورد نظر محاسبه می‌شود.
 مرحله دوم: از آماره‌های به دست آمده صدک $[m(1-\alpha)]$ محاسبه می‌شود.
 مرحله سوم: فرآیند فوق به تعداد B بار تکرار می‌شود
 مرحله چهارم: میانگین کران‌های به دست آمده در مرحله قبل، حد بالای کنترل بوت استرپ خواهد بود.
 شکل مراحل الگوریتم سه در زیر ارائه شده است.

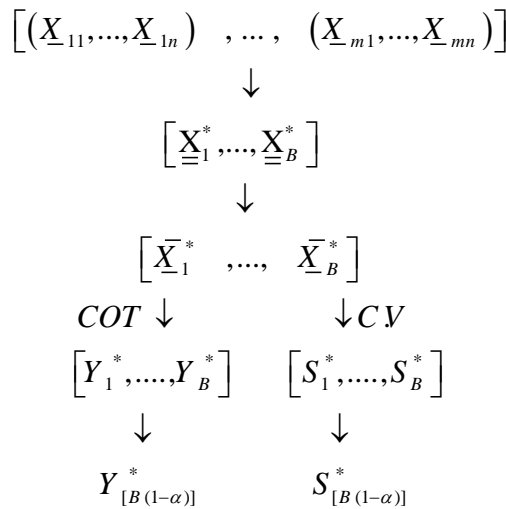


شکل (۳) مراحل الگوریتم سه باز نمونه گیری

الگوریتم IV

مانند قسمت قبل داده‌ها به صورت (10) در نظر گرفته می‌شود.
 مرحله اول: از ماتریس مورد نظر B نمونه هریک به اندازه n به صورت تصادفی ساده با جایگذاری انتخاب می‌شود.
 مرحله دوم: آماره‌های مورد نظر از نمونه‌های باز نمونه‌گیری شده به دست آورده می‌شود.
 مرحله سوم: از آماره‌های به دست آمده صدک بالا را به دست آورده و به عنوان حد بالای کنترل در نظر گرفته می‌شود.

شکل مراحل الگوریتم چهار در زیر ارائه شده است.



شکل (۴) مراحل الگوریتم چهار بازنمونه گیری

۳- نتایج و بحث

در این قسمت با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو، الگوریتم‌های معرفی شده در بخش قبل را براساس معیار ARL_0 مقایسه و عملکرد این الگوریتم‌ها برای شناسایی نقاط خارج از کنترل را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. ARL_0 متوسط تعداد نقاطی است که داخل حدود کنترل قرار می‌گیرند، قبل از اینکه یک نقطه خارج از کنترل مشاهده شود. وقتی فرایند تحت کنترل است متوسط طول دنباله تا مشاهده اولین نمونه خارج از حدود کنترل را با ARL_0 نشان می‌دهند و به صورت $ARL_0 = 1/\alpha$ نیز تعریف می‌شود که آلفا احتمال قرار گرفتن یک نقطه خارج از حدود کنترل است وقتی که فرایند تحت کنترل است. برای محاسبه ARL_0 از دو روش استفاده شده است. روش دوجمله ای و روش هندسی که نتایج در جداولی که در ادامه آمده، ارائه شده است. در این قسمت تعداد تکرار مونت کارلو برابر با ۵۰۰۰ و تعداد بوت‌استرپ را برابر با $B=1000$ در نظر می‌گیریم. برای محاسبه $\hat{\Sigma} = \bar{S}$ همچنین برای محاسبه a از برآورد میانگین $\hat{\mu} = a$ استفاده می‌گردد. توزیع نرمال دو متغیره با پارامترهای $\mu = (0, 0)$ و $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$ برای شبیه‌سازی داده‌ها در نظر گرفته شده است. همچنین در توزیع تی دو متغیره ماتریس مقیاس به صورت Σ و همچنین درجه آزادی برابر دو در نظر گرفته شده است. در توزیع T چندمتغیره ماتریس کوواریانس عبارتست از

$$\text{cov}(\mathbf{X}) = \left(\frac{df}{df-2} \right) \Sigma$$

برای تولید داده‌های چندمتغیره از توزیع چوله نرمال، پارامترهای بردار مکان $\Lambda = (0, 0)'$ و

ماتریس مقیاس Σ و همچنین از پارامترهای چولگی $\eta_1 = (-9, -6)$ استفاده شده است. برای تولید داده‌های شبیه‌سازی از توزیع گاما دو متغیره، بردار پارامترهای شکل به صورت $\gamma_1 = (0.5, 1.25, 2)$ و بردار پارامترهای مقیاس $\alpha_1 = (0.01, 0.03, 0.04)$ در نظر گرفته شده است.

جهت انجام فرایند شبیه‌سازی گام‌های زیر به ترتیب انجام می‌پذیرد:

گام اول: در فاز یک از توزیعهای نرمال، تی، چوله نرمال و گاما که همگی دو متغیره هستند با پارامترهایی که در بالا بیان شد، به تعداد n نمونه تصادفی تولید می‌کنیم.

گام دوم: گام اول را به تعداد m مرتبه تکرار می‌کنیم.

گام سوم: از آنجا که فرض بر این است که پارامترها توزیع جامعه مورد مطالعه نامعلوم است لذا با استفاده از داده‌های تولید شده در دو گام قبل پارامترهای μ و Σ را برآورد می‌کنیم (\bar{S}, \bar{X}) و در محاسبات از این مقادیر برآورد شده به جای پارامترهای نامعلوم μ و Σ استفاده می‌کنیم.

گام چهارم: با استفاده از الگوریتم‌های یک تا چهار پیشنهادی در بخش ۳ حدود کنترل بوت استرپ را برای نمودار جمع تجمعی T^2 هتلینگ (COT) و کنترل جمع تجمعی برداری با استفاده از تکرار $B=2000$ بار بوت استرپ و فقط با استفاده از m نمونه هریک به اندازه n محاسبه می‌کنیم.

گام پنجم: از توزیع‌های نرمال، تی، چوله نرمال و گاما به تعداد n نمونه تصادفی تولید می‌کنیم بعد از محاسبه میانگین نمونه از روی داده‌های تولید شده آماره‌های موردنظر یعنی آماره جمع تجمعی T^2 هتلینگ (COT) و آماره کنترل جمع تجمعی برداری را محاسبه می‌کنیم.
گام ششم:

روش هندسی: مقادیر آماره‌های به دست آمده را با حدود کنترل به دست آمده از گام چهارم مقایسه می‌کنیم.

اگر آماره‌های به دست آمده داخل حدود کنترل بود گام پنجم را تکرار می‌کنیم در غیر اینصورت طول دنباله را ثبت می‌کنیم روش دوجمله‌ای: ۱۰۰۰ نمونه n تایی تولید کرده و آماره متناظر با نمونه‌های n تایی را محاسبه کرده و درصد آماره‌هایی که خارج از حدود کنترل گام چهارم است به عنوان طول دنباله (RL) در نظر می‌گیریم.
گام هفتم: گام اول الی ششم را به تعداد ۵۰۰۰ مرتبه تکرار می‌کنیم.

گام هشتم: میانگین و جذر واریانس ۵۰۰۰ طول دنباله به دست آمده را محاسبه کرده به عنوان متوسط طول دنباله و انحراف معیار آن در نظر می‌گیریم.

در جداول ۱ تا ۱۲ متوسط طول دنباله ARL_0 را برای چهار الگوریتم و روش‌های کلاسیک به تفکیک آماره‌های جمع تجمعی T^2 هتلینگ (COT) و کنترل جمع تجمعی برداری (Cusum vector)، براساس روش‌های هندسی و دوجمله‌ای محاسبه و ارائه شده است. مقادیر α به صورت $\alpha = 0/025, 0/05, 0/10$ و مقادیر $n = 5, 10$ و $m = 15, 30$ در نظر گرفته شده است. در هریک از جداول براساس α در نظر گرفته شده مقدار هدف تحت عنوان مقدار اسمی (مطلوب) مشخص شده است. همان طور که از جداول ۱ تا ۳ مشخص است در توزیع نرمال وقتی از روش دوجمله‌ای برای محاسبه متوسط طول دنباله استفاده شده است در هر دو نمودار جمع تجمعی برداری و نمودار جمع تجمعی T^2 هتلینگ (COT) الگوریتم چهارم بهتر از الگوریتم‌های دیگر و نمودارهای کلاسیک است. اما در روش هندسی، الگوریتم‌های بوت استرپ نمودار جمع تجمعی T^2 هتلینگ بهتر از الگوریتم‌های نمودار جمع تجمعی برداری عمل می‌کند. در این حالت نمودار جمع تجمعی برداری و الگوریتم‌های بوت استرپ آن به مقدار اسمی نزدیک نیستند.

در توزیع تی همانگونه که از جداول ۴ تا ۶ واضح است، در روش دوجمله‌ای هر دو نمودار جمع تجمعی T^2 هتلینگ و جمع تجمعی برداری عملکرد قابل قبول ندارند اما الگوریتم‌های دوم و چهارم بوت استرپ در مقایسه با الگوریتم‌های اول و سوم و نمودارهای جمع تجمعی T^2 هتلینگ و جمع تجمعی برداری عملکرد بهتری دارند. همچنین در روش هندسی نمودار کلاسیک جمع تجمعی T^2 هتلینگ بهتر از نمودار جمع تجمعی برداری است و همچنین الگوریتم‌های بوت استرپ در نمودار جمع تجمعی T^2 هتلینگ نسبت به الگوریتم‌های بوت استرپ نمودار جمع تجمعی برداری به مقدار اسمی نزدیکتر هستند.

در توزیع گاما همانگونه که در جداول ۷ تا ۹ نشان داده شده است، در روش دوجمله‌ای الگوریتم چهارم در نمودارهای جمع تجمعی T^2 هتلینگ و جمع تجمعی برداری عملکرد بهتری نسبت به الگوریتم‌های دیگر و روش کلاسیک دارد. در روش هندسی متوسط طول دنباله نمودار جمع تجمعی برداری از مقدار اسمی فاصله زیادی دارد اما الگوریتم‌های بوت استرپ در نمودار جمع تجمعی T^2 هتلینگ عملکرد بهتری دارند.

در توزیع چوله نرمال همانگونه که در جداول ۱۰ تا ۱۲ نشان داده شده است، در روش دوجمله ای الگوریتم چهارم بوت استرپ در مقایسه با الگوریتم های دیگر و نمودارهای کلاسیک جمع تجمعی T^2 هتلینگ و جمع تجمعی برداری عملکرد بهتری دارد به عبارت دیگر مقادیر متوسط طول دنباله آن به مقادیر اسمی نسبت به روش های دیگر نزدیک تر است. در روش هندسی، نمودار جمع تجمعی برداری و الگوریتم های آن نسبت به الگوریتم های نمودار جمع تجمعی T^2 هتلینگ عملکرد بسیار ضعیف تری دارند.

جدول شماره (۱): متوسط طول دنباله برای توزیع نرمال با $\alpha = 0/10$

chart	Cusum vector				COT					
	m	۱۵		۳۰		۱۵		۳۰		
n	۵	۱۰	۵	۱۰	۵	۱۰	۵	۱۰		
method	True									
Binomial	I	۱۰	۶(۰/۱۵)	۷(۰/۱۱)	۸(۰/۱۰)	۸(۰/۰۹)	۵(۰/۲۷)	۵(۰/۲۵)	۶(۰/۲۲)	۶(۰/۲۲)
	II	۱۰	۹(۰/۱۴)	۸(۰/۱۲)	۱۰(۰/۰۹)	۱۰(۰/۰۸)	۶(۰/۲۵)	۷(۰/۲۳)	۷(۰/۲۱)	۷(۰/۲۱)
	III	۱۰	۸(۰/۱۱)	۹(۰/۰۹)	۹(۰/۰۸)	۹(۰/۰۶)	۶(۰/۲۳)	۷(۰/۲۱)	۷(۰/۱۹)	۷(۰/۱۹)
	IV	۱۰	۱۰(۰/۱۰)	۱۰(۰/۰۸)	۱۰(۰/۰۷)	۱۰(۰/۰۶)	۱۰(۰/۱۹)	۱۰(۰/۱۸)	۱۰(۰/۱۷)	۱۰(۰/۱۷)
	CLASIC	۱۰	۱۰(۰/۰۵)	۲(۰/۰۶)	۱(۰/۱۰)	۲(۰/۰۹)	>۳۰	>۳۰	>۳۰	>۳۰
Geometric	I	۱۰	۴(۳)	۲(۲)	۵(۴)	۲(۲)	۱۵(۱۸)	۱۴(۱۷)	۲۲(۲۲)	۲۱(۲۱)
	II	۱۰	۵(۶)	۲(۲)	۵(۵)	۲(۲)	۲۰(۲۱)	۱۸(۲۰)	۲۴(۲۳)	۲۵(۲۴)
	III	۱۰	۳(۲)	۲(۱)	۴(۳)	۲(۱)	۱۷(۱۵)	۱۵(۱۳)	۲۷(۲۲)	۲۴(۲۰)
	IV	۱۰	۴(۳)	۲(۲)	۴(۳)	۲(۲)	۲۶(۲۲)	۲۳(۱۹)	>۳۰	>۳۰
	CLASIC	۱۰	۳(۳)	۱(۲)	۴(۴)	۲(۲)	>۳۰	>۳۰	>۳۰	>۳۰

جدول شماره (۲): متوسط طول دنباله برای توزیع نرمال با $\alpha = ۰/۰۵$

chart	Cusum vector				COT					
	m	۱۵		۳۰		۱۵		۳۰		
n	۵	۱۰	۵	۱۰	۵	۱۰	۵	۱۰		
method	True									
Binomial	I	۲۰	۹(۰/۱۲)	۹(۰/۱۰)	۱۲(۰/۰۹)	۱۳(۰/۰۷)	۷(۰/۲)	۷(۰/۲)	۸(۰/۱۹)	۸(۰/۱۸)
	II	۲۰	۱۴(۰/۱۱)	۱۵(۰/۰۹)	۱۷(۰/۰۷)	۱۶(۰/۰۷)	۹(۰/۲)	۱۰(۰/۱۷)	۱۱(۰/۱۶)	۱۲(۰/۱۵)
	III	۲۰	۱۱(۰/۰۹)	۱۳(۰/۰۷)	۱۵(۰/۰۷)	۱۶(۰/۰۵)	۹(۰/۱۷)	۹(۰/۱۷)	۱۰(۰/۱۶)	۱۰(۰/۱۵)
	IV	۲۰	۲۰(۰/۰۷)	۲۰(۰/۰۶)	۲۰(۰/۰۵)	۲۱(۰/۰۴)	۲۳(۰/۱۲)	۲۲(۰/۱۱)	۲۱(۰/۱۲)	۲۱(۰/۱۱)
	CLASIC	۲۰	۵(۰/۱۵)	۵(۰/۰۶)	۶(۰/۱۲)	۷(۰/۰۹)	>۵۰	>۵۰	۴۳(۰/۰۸)	>۵۰
Geometric	I	۲۰	۴(۴)	۲(۲)	۵(۵)	۳(۳)	۱۹(۲۱)	۱۷(۱۹)	۲۶(۲۴)	۲۵(۲۳)
	II	۲۰	۷(۹)	۳(۳)	۷(۸)	۳(۳)	۲۳(۲۴)	۲۳(۲۴)	۳۰(۲۵)	۳۰(۲۵)
	III	۲۰	۴(۳)	۲(۱)	۵(۴)	۳(۲)	۲۱(۱۸)	۱۹(۱۷)	۳۲(۲۴)	۳۰(۲۳)
	IV	۲۰	۹(۷)	۱۲(۲)	۱۰(۵)	۱۱(۲)	۳۹(۲۶)	۳۵(۲۵)	۴۴(۲۶)	۴۳(۲۶)
	CLASIC	۲۰	۲(۳)	۳(۲)	۳(۴)	۴(۲)	>۵۰	>۵۰	۵۰(۲۶)	۵۰(۲۶)

جدول شماره (۳): متوسط طول دنباله برای توزیع نرمال با $\alpha = ۰/۰۲۵$

chart	Cusum vector				COT					
	m	۱۵		۳۰		۱۵		۳۰		
n	۵	۱۰	۵	۱۰	۵	۱۰	۵	۱۰		
method	True									
⊗	I	۴۰	۱۴(۰/۰۹)	۱۲(۰/۰۸)	۱۶(۰/۰۷)	۱۷(۰/۰۶)	۱۵(۰/۱۰)	۱۳(۰/۱۰)	۱۵(۰/۱۰)	۱۵(۰/۰۹)

	II	۴۰	۲۵(۰/۰۷)	۱۷(۰/۰۸)	۲۷(۰/۰۶)	۲۸(۰/۰۵)	۳۰(۰/۰۷)	۲۵(۰/۰۸)	۲۵(۰/۰۸)	۲۸(۰/۰۸)
	III	۴۰	۱۷(۰/۰۷)	۱۷(۰/۰۶)	۲۱(۰/۰۵)	۲۵(۰/۰۴)	۱۹(۰/۰۹)	۱۷(۰/۰۹)	۱۸(۰/۰۹)	۱۹(۰/۰۸)
	IV	۴۰	۴۳(۰/۰۴)	۴۰(۰/۰۴)	۳۹(۰/۰۴)	۴۱(۰/۰۳)	۹۰(۰/۰۴)	۹۶(۰/۰۴)	۶۳(۰/۰۵)	۷۱(۰/۰۴)
	CLASIC	۴۰	۸(۰/۱۵)	۹(۰/۱۳)	۱۰(۰/۱۲)	۹(۰/۰۸)	>۱۰۰	>۱۰۰	>۱۰۰	>۱۰۰
Geometric	I	۴۰	۵(۶)	۳(۲)	۷(۷)	۳(۳)	۲۰(۲۱)	۱۸(۲۰)	۲۸(۲۴)	۲۸(۲۴)
	II	۴۰	۱۱(۱۳)	۴(۵)	۱۰(۱۱)	۵(۵)	۲۸(۲۵)	۲۶(۲۵)	۳۴(۲۵)	۳۶(۲۷)
	III	۴۰	۵(۴)	۲(۲)	۶(۵)	۳(۳)	۲۴(۲۰)	۲۱(۱۸)	۳۵(۲۵)	۳۴(۲۵)
	IV	۴۰	۱۹(۱۴)	۲۳(۱۴)	۲۰(۱۲)	۲۴(۱۱)	۴۶(۲۷)	۴۳(۲۷)	۴۹(۲۶)	۴۸(۲۷)
	CLASIC	۴۰	۴(۴)	۳(۲)	۵(۵)	۳(۳)	۵۰(۲۷)	۵۱(۲۷)	۵۰(۲۶)	۵۱(۲۷)

جدول شماره (۴): متوسط طول دنباله برای توزیع تی استیودنت با $\alpha = ۰/۱۰$

chart	method	True	Cusum vector				COT			
			۱۵	۳۰	۱۵	۳۰				
m	n		۵	۱۰	۵	۱۰	۵	۱۰	۵	۱۰
Binomial	I	۱۰	۷(۰/۱۱)	۷(۰/۰۹)	۸(۰/۰۷)	۸(۰/۰۶)	۶(۰/۱۸)	۶(۰/۱۸)	۷(۰/۱۳)	۷(۰/۱۴)
	II	۱۰	۱۰(۰/۱۰)	۹(۰/۰۹)	۱۰(۰/۰۷)	۱۰(۰/۰۶)	۹(۰/۱۶)	۸(۰/۱۷)	۱۰(۰/۱۲)	۱۰(۰/۱۳)
	III	۱۰	۸(۰/۰۸)	۸(۰/۰۷)	۹(۰/۰۶)	۹(۰/۰۵)	۷(۰/۱۶)	۷(۰/۱۶)	۸(۰/۱۱)	۸(۰/۱۲)
	IV	۱۰	۹(۰/۰۸)	۱۰(۰/۰۷)	۹(۰/۰۶)	۱۰(۰/۰۵)	۱۰(۰/۱۴)	۱۰(۰/۱۴)	۱۰(۰/۱۰)	۹(۰/۱۲)
	CLASIC	۱۰	۲(۰/۰۹)	۳(۰/۰۷)	۵(۰/۰۷)	۷(۰/۰۶)	>۳۰	>۳۰	>۳۰	>۳۰
Geometric	I	۱۰	۶(۶)	۳(۲)	۸(۷)	۴(۴)	۱۷(۱۶)	۱۵(۱۶)	۲۲(۲۰)	۲۳(۲۰)
	II	۱۰	۹(۱۰)	۴(۴)	۱۰(۱۰)	۵(۵)	۲۲(۲۰)	۲۲(۲۱)	۲۸(۲۳)	۲۹(۲۴)
	III	۱۰	۶(۶)	۳(۲)	۸(۷)	۴(۳)	۱۷(۱۴)	۱۶(۱۵)	۲۳(۱۸)	۲۴(۲۰)
	IV	۱۰	۷(۶)	۴(۳)	۸(۷)	۴(۴)	۲۱(۱۸)	۲۱(۱۸)	۲۶(۲۱)	۲۷(۲۱)
	CLASIC	۱۰	>۳۰	>۳۰	>۳۰	>۳۰	>۳۰	>۳۰	>۳۰	>۳۰

جدول شماره (۵): متوسط طول دنباله برای توزیع تی استیودنت با $\alpha = ۰/۰۵$

chart	method	True	Cusum vector				COT			
			۱۵	۳۰	۱۵	۳۰				
m	n		۵	۱۰	۵	۱۰	۵	۱۰	۵	۱۰
Binomial	I	۲۰	۹(۰/۰۹)	۱۰(۰/۰۸)	۱۲(۰/۰۶)	۱۳(۰/۰۵)	۷(۰/۱۷)	۷(۰/۱)	۹(۰/۱۳)	۹(۰/۱۲)
	II	۲۰	۱۶(۰/۰۸)	۱۹(۰/۰۶)	۲۱(۰/۰۵)	۱۸(۰/۰۵)	۱۲(۰/۱۴)	۱۲(۰/۱)	۱۷(۰/۱)	۱۸(۰/۱)
	III	۲۰	۱۱(۰/۰۷)	۱۲(۰/۰۶)	۱۴(۰/۰۵)	۱۴(۰/۰۴)	۸(۰/۱۴)	۹(۰/۱)	۱۰(۰/۱۱)	۱۱(۰/۱)
	IV	۲۰	۱۷(۰/۰۶)	۱۸(۰/۰۵)	۱۷(۰/۰۴)	۱۷(۰/۰۴)	۲۱(۰/۱۰)	۲۰(۰/۱)	۱۸(۰/۰۸)	۱۹(۰/۰۸)
	CLASIC	۲۰	۵(۰/۱۷)	۶(۰/۱۲)	۷(۰/۱۸)	۹(۰/۱۴)	>۵۰	>۵۰	۴۷(۰/۰۶)	>۵۰
Geometric	I	۲۰	۷(۷.۲)	۴(۴.۲)	۱۱(۱۱)	۶(۶)	۱۹(۱۸)	۱۹(۱۸)	۲۷(۲۳)	۲۷(۲۳)
	II	۲۰	۱۲(۱۳.۳)	۸(۹)	۱۷(۱۷)	۹(۱۰)	۲۷(۲۳)	۲۸(۲۴)	۳۶(۲۷)	۳۵(۲۷)
	III	۲۰	۸(۷.۳)	۴(۴)	۱۱(۱۰)	۷(۶)	۲۰(۱۷)	۲۰(۱۷)	۲۸(۲۲)	۲۸(۲۲)
	IV	۲۰	۱۰(۹)	۶(۵)	۱۳(۱۱)	۷(۷)	۲۸(۲۲)	۲۸(۲۲)	۳۵(۲۵)	۳۵(۲۵)
	CLASIC	۲۰	>۵۰	>۵۰	>۵۰	>۵۰	۴۲(۲۷)	۴۴(۲۸)	۴۳(۲۷)	۴۴(۲۸)

جدول شماره (۶): متوسط طول دنباله برای توزیع تی استیودنت با $\alpha = ۰/۰۲۵$

chart	Cusum vector				COT			
M	۱۵	۳۰	۱۵	۳۰				

	N	Method	True	۵	۱۰	۵	۱۰	۵	۱۰	۵	۱۰
				Binomial	I	۴۰	۱۲(۰/۰۸)	۱۲(۰/۰۷)	۱۷(۰/۰۵)	۱۹(۰/۰۴)	۸(۰/۱۶)
		II	۴۰	۲۶(۰/۰۶)	۱۹(۰/۰۷)	۳۱(۰/۰۴)	۳۴(۰/۰۳)	۲۰(۰/۱۲)	۱۹(۰/۱۲)	۳۰(۰/۰۷)	۳۰(۰/۰۸)
		III	۴۰	۱۵(۰/۰۶)	۱۶(۰/۰۶)	۲۰(۰/۰۴)	۲۲(۰/۰۳)	۱۱(۰/۱۳)	۱۰(۰/۱۴)	۱۳(۰/۱۰)	۱۳(۰/۱۰)
		IV	۴۰	۳۳(۰/۰۴)	۳۰(۰/۰۴)	۲۹(۰/۰۳)	۲۹(۰/۰۳)	۴۵(۰/۰۷)	۳۸(۰/۰۸)	۳۶(۰/۰۶)	۳۶(۰/۰۶)
		CLASIC	۴۰	۷(۰/۱۸)	۷(۰/۱۳)	۱۱(۰/۱۴)	۱۰(۰/۰۹)	>۱۰۰	>۱۰۰	۴۸(۰/۰۶)	۵۹(۰/۰۵)
Geometric		I	۴۰	۱۰(۱۰)	۵(۶)	۱۵(۱۴)	۸(۹)	۲۱(۱۹)	۲۱(۱۹)	۳۱(۲۵)	۳۰(۲۴)
		II	۴۰	۱۶(۱۶)	۹(۱۰)	۲۳(۲۱)	۱۶(۱۷)	۳۳(۲۶)	۳۳(۲۶)	۴۰(۲۹)	۴۰(۲۸)
		III	۴۰	۱۰(۹)	۶(۵)	۱۵(۱۳)	۹(۹)	۲۲(۱۸)	۲۲(۱۸)	۳۲(۲۴)	۳۲(۲۴)
		IV	۴۰	۱۴(۱۲)	۹(۷)	۱۹(۱۷)	۱۱(۱۱)	۳۶(۲۵)	۳۶(۲۵)	۴۲(۲۷)	۴۲(۲۸)
		CLASIC	۴۰	۵۳(۶۱)	>۱۰۰	۶۶(۸)	>۱۰۰	۴۴(۲۷)	۴۴(۲۷)	۴۳(۲۸)	۴۵(۲۹)

جدول شماره (۷): متوسط طول دنباله برای توزیع گاما با $\alpha = ۰/۱۰$

	Chart	M	Cusum vector				COT				
			۱۵	۳۰	۱۵	۳۰					
	n	method	True	۵	۱۰	۵	۱۰	۵	۱۰		
				Binomial	I	۱۰	۷(۰/۱۴)	۷(۰/۱۱)	۸(۰/۱۰)	۸(۰/۰۸)	۶(۰/۲۱)
		II	۱۰	۱۰(۰/۱۳)	۸(۰/۱۱)	۱۰(۰/۰۹)	۹(۰/۰۸)	۸(۰/۱۹)	۸(۰/۱۹)	۸(۰/۱۸)	۸(۰/۱۸)
		III	۱۰	۸(۰/۱۱)	۹(۰/۰۹)	۹(۰/۰۷)	۹(۰/۰۶)	۸(۰/۱۸)	۸(۰/۱۸)	۸(۰/۱۶)	۸(۰/۱۷)
		IV	۱۰	۱۰(۰/۰۹)	۱۰(۰/۰۸)	۱۰(۰/۰۷)	۱۰(۰/۰۶)	۱۱(۰/۱۵)	۱۱(۰/۱۵)	۱۰(۰/۱۵)	۱۰(۰/۱۵)
		CLASIC	۱۰	۲(۰/۰۴)	۳(۰/۰۶)	۴(۰/۰۸)	۲(۰/۰۸)	>۳۰	>۳۰	>۳۰	>۳۰
Geometric		I	۱۰	۴(۳)	۲(۱)	۴(۳)	۲(۱)	۱۶(۱۸)	۱۵(۱۸)	۲۲(۲۲)	۲۱(۲۱)
		II	۱۰	۵(۵)	۲(۲)	۵(۴)	۲(۲)	۲۰(۲۲)	۲۰(۲۱)	۲۵(۲۴)	۲۴(۲۲)
		III	۱۰	۳(۲)	۲(۱)	۴(۳)	۲(۱)	۱۷(۱۵)	۱۵(۱۳)	۲۵(۲۲)	۲۴(۲۰)
		IV	۱۰	۴(۳)	۲(۱)	۴(۳)	۲(۱)	۲۶(۲۱)	۲۴(۲۰)	>۳۰	>۳۰
		CLASIC	۱۰	>۳۰	>۳۰	>۳۰	>۳۰	>۳۰	>۳۰	>۳۰	>۳۰

جدول شماره (۸): متوسط طول دنباله برای توزیع گاما با $\alpha = ۰/۰۵$

	chart	m	Cusum vector				COT				
			۱۵	۳۰	۱۵	۳۰					
	n	method	True	۵	۱۰	۵	۱۰	۵	۱۰		
				Binomial	I	۲۰	۹(۰/۱۲)	۹(۰/۱)	۱۲(۰/۰۸)	۱۲(۰/۰۷)	۷(۰/۲)
		II	۲۰	۱۴(۰/۱)	۱۵(۰/۰۹)	۱۹(۰/۰۷)	۱۵(۰/۰۷)	۹(۰/۱۸)	۱۰(۰/۱۷)	۱۱(۰/۱۵)	۱۲(۰/۱۵)
		III	۲۰	۱۲(۰/۰۹)	۱۳(۰/۰۸)	۱۵(۰/۰۶)	۱۶(۰/۰۵)	۸(۰/۱۸)	۹(۰/۱۷)	۱۰(۰/۱۵)	۱۰(۰/۱۴)
		IV	۲۰	۲۰(۰/۰۷)	۱۹(۰/۰۶)	۲۰(۰/۰۵)	۲۰(۰/۰۴)	۲۱(۰/۱۲)	۲۱(۰/۱۲)	۲۲(۰/۱۱)	۲۲(۰/۱۲)
		CLASIC	۲۰	۵(۰/۰۹)	۶(۰/۱۲)	۶(۰/۱۱)	۷(۰/۱)	>۵۰	>۵۰	۴۶(۰/۰۸)	>۵۰
Geometric		I	۲۰	۴(۴)	۲(۱.۸)	۶(۷)	۳(۲)	۱۹(۲۰)	۱۸(۱۹)	۲۵(۲۳)	۲۴(۲۳)
		II	۲۰	۸(۱۰)	۴(۵)	۹(۱۱)	۳(۳)	۲۵(۲۵)	۲۳(۲۴)	۲۹(۲۵)	۳۱(۲۶)
		III	۲۰	۴(۳)	۲(۱.۳)	۵(۴)	۳(۲)	۲۰(۱۸)	۱۹(۱۶)	۳۱(۲۴)	۳۰(۲۳)
		IV	۲۰	۵(۴)	۲(۱.۸)	۶(۵)	۳(۲)	۳۸(۲۷)	۳۵(۲۵)	۴۲(۲۷)	۴۱(۲۶)
		CLASIC	۲۰	>۵۰	>۵۰	>۵۰	>۵۰	>۵۰	۴۹(۲۷)	۴۸(۲۷)	>۵۰

جدول شماره (۹): متوسط طول دنباله برای توزیع گاما با $\alpha = ۰/۰۲۵$

chart		Cusum vector				COT				
m		۱۵		۳۰		۱۵		۳۰		
n		۵	۱۰	۵	۱۰	۵	۱۰	۵	۱۰	
method	True									
Binomial	I	۴۰	۱۲(۰/۱۱)	۱۲(۰/۰۹)	۱۸(۰/۰۶)	۱۷(۰/۰۶)	۸(۰/۱۹)	۶(۰/۲۰)	۹(۰/۱۶)	۹(۰/۱۶)
	II	۴۰	۲۱(۰/۰۸)	۱۶(۰/۰۹)	۲۸(۰/۰۵)	۲۶(۰/۰۵)	۱۳(۰/۱۶)	۱۲(۰/۱۶)	۱۷(۰/۱۳)	۱۸(۰/۱۲)
	III	۴۰	۱۷(۰/۰۷)	۱۸(۰/۰۶)	۲۲(۰/۰۵)	۲۴(۰/۰۴)	۱۰(۰/۱۷)	۱۰(۰/۱۷)	۱۱(۰/۱۵)	۱۲(۰/۱۴)
	IV	۴۰	۴۱(۰/۰۴)	۳۹(۰/۰۴)	۳۸(۰/۰۳)	۳۸(۰/۰۳)	۴۲(۰/۰۸)	۴۰(۰/۰۹)	۴۱(۰/۰۸)	۴۰(۰/۰۸)
	CLASIC	۴۰	۸(۰/۰۹)	۸(۰/۰۹)	۱۱(۰/۰۶)	۱۰(۰/۰۷)	>۱۰۰	>۱۰۰	۴۶(۰/۰۷)	۵۹(۰/۰۷)
Geometric	I	۴۰	۶(۷)	۳(۳)	۸(۸)	۳(۳)	۲۱(۲۱)	۱۸(۱۹)	۲۹(۲۵)	۲۸(۲۴)
	II	۴۰	۱۱(۱۳)	۴(۶)	۱۲(۱۳)	۵(۵)	۲۸(۲۵)	۲۷(۲۵)	۳۳(۲۷)	۳۵(۲۷)
	III	۴۰	۵(۴)	۳(۲)	۷(۶)	۳(۲)	۲۴(۱۹)	۲۱(۱۸)	۳۵(۲۵)	۳۴(۲۵)
	IV	۴۰	۹(۸)	۴(۳)	۱۰(۸)	۴(۳)	۴۵(۲۷)	۴۲(۲۷)	۴۸(۲۸)	۴۷(۲۴)
	CLASIC	۴۰	۶۳(۳۷)	>۱۰۰	>۱۰۰	>۱۰۰	۵۰(۰)	۵۱(۲۷)	۴۸(۲۸)	۴۹(۲۷)

جدول (۱۰): متوسط طول دنباله برای توزیع نرمال چوله با $\alpha = ۰/۱۰$

chart		Cusum vector				COT				
m		۱۵		۳۰		۱۵		۳۰		
n		۵	۱۰	۵	۱۰	۵	۱۰	۵	۱۰	
method	True									
Binomial	I	۱۰	۷(۰/۱۴)	۷(۰/۱۱)	۸(۰/۱)	۸(۰/۰۸)	۵(۰/۲۷)	۵(۰/۲۵)	۶(۰/۲۳)	۶(۰/۲۱)
	II	۱۰	۹(۰/۱۳)	۸(۰/۱۲)	۱۰(۰/۱)	۹(۰/۰۸)	۶(۰/۲۵)	۷(۰/۲۳)	۷(۰/۲۲)	۷(۰/۲۰)
	III	۱۰	۸(۰/۱۱)	۹(۰/۰۹)	۹(۰/۰۸)	۹(۰/۰۶)	۶(۰/۲۳)	۷(۰/۲۱)	۷(۰/۲)	۸(۰/۱۸)
	IV	۱۰	۱۰(۰/۱)	۱۰(۰/۰۸)	۱۰(۰/۰۷)	۱۰(۰/۰۶)	۱۰(۰/۱۹)	۱۰(۰/۱۷)	۱۰(۰/۱۷)	۱۰(۰/۱۶)
	CLASIC	۱۰	۲(۰/۱۴)	۳(۰/۱۱)	۲(۰/۱۲)	۴(۰/۰۸)	>۳۰	>۳۰	>۳۰	>۳۰
Geometric	I	۱۰	۳(۳)	۲(۲)	۴(۳)	۲(۲)	۱۷(۱۹)	۱۴(۱۷)	۲۲(۲۲)	۲۱(۲۱)
	II	۱۰	۵(۵)	۲(۲)	۵(۴)	۲(۲)	۲۰(۲۱)	۱۹(۲۱)	۲۴(۲۳)	۲۴(۲۳)
	III	۱۰	۳(۲)	۲(۱)	۴(۳)	۲(۱)	۱۷(۱۶)	۱۵(۱۳)	۲۷(۲۲)	۲۴(۲۰)
	IV	۱۰	۴(۳)	۸(۷)	۷(۳)	۹(۶)	۲۷(۲۲)	۲۳(۱۹)	>۳۰	>۳۰
	CLASIC	۱۰	۱(۱)	۲(۱)	۲(۳)	۲(۱)	>۳۰	>۳۰	>۳۰	>۳۰

جدول شماره (۱۱): متوسط طول دنباله برای توزیع نرمال چوله با $\alpha = ۰/۰۵$

chart		Cusum vector				COT				
m		۱۵		۳۰		۱۵		۳۰		
n		۵	۱۰	۵	۱۰	۵	۱۰	۵	۱۰	
method	True									
Binomial	I	۲۰	۹(۰/۱۲)	۱۰(۰/۰۱)	۱۲(۰/۰۸)	۱۳(۰/۰۷)	۷(۰/۲۱)	۷(۰/۲)	۸(۰/۱۸)	۸(۰/۱۲)
	II	۲۰	۱۴(۰/۱۱)	۱۵(۰/۰۹)	۱۸(۰/۰۷)	۱۶(۰/۰۶)	۹(۰/۱۹)	۱۰(۰/۱۷)	۱۱(۰/۱۶)	۱۲(۰/۱۵)
	III	۲۰	۱۲(۰/۰۹)	۱۳(۰/۰۸)	۱۵(۰/۰۶)	۱۶(۰/۰۵)	۸(۰/۱۸)	۹(۰/۱۷)	۱۰(۰/۱۶)	۱۱(۰/۱۴)
	IV	۲۰	۲۰(۰/۰۷)	۲۱(۰/۰۶)	۲۰(۰/۰۵)	۲۱(۰/۰۴)	۲۱(۰/۱۲)	۲۱(۰/۱۲)	۲۱(۰/۱۲)	۲۳(۰/۱۰)
	CLASIC	۲۰	۷(۰/۰۹)	۷(۰/۰۸)	۸(۰/۰۶)	۷(۰/۰۵)	>۵۰	>۵۰	۳۹(۰/۱۲)	>۵۰
Geometric	I	۲۰	۴(۵)	۲(۲)	۵(۵)	۳(۲)	۱۹(۲۱)	۱۷(۱۹)	۲۵(۲۳)	۲۵(۲۳)
	II	۲۰	۸(۹)	۳(۳)	۸(۸)	۳(۳)	۲۴(۲۴)	۲۳(۲۳)	۲۹(۲۵)	۲۹(۲۵)

III	۲۰	۴(۳)	۲(۱)	۵(۴)	۳(۲)	۲۰(۱۸)	۱۸(۱۵)	۳۰(۲۳)	۳۰(۲۳)
IV	۲۰	۵(۴)	۲(۲)	۶(۵)	۳(۲)	۳۸(۲۶)	۳۴(۲۴)	۴۲(۲۶)	۴۲(۲۵)
CLASIC	۲۰	>۵۰	>۵۰	>۵۰	>۵۰	۴۹(۲۶)	>۵۰	>۵۰	>۵۰

جدول شماره (۱۲): متوسط طول دنباله برای توزیع نرمال چوله با $\alpha = ۰/۰۲۵$

chart		Cusum vector					COT			
m		۱۵		۳۰			۱۵		۳۰	
n		۵		۱۰	۵	۱۰	۵	۱۰	۵	۱۰
method		True								
Binomial	I	۴۰	۱۳(۰/۰۹)	۱۲(۰/۰۹)	۱۷(۰/۰۷)	۱۷(۰/۰۶)	۱۴(۰/۱)	۱۴(۰/۱)	۱۵(۰/۱)	۱۴(۰/۱)
	II	۴۰	۲۳(۰/۰۷)	۱۷(۰/۰۸)	۲۸(۰/۰۵)	۲۶(۰/۰۵)	۲۶(۰/۰۸)	۲۶(۰/۰۸)	۲۸(۰/۰۸)	۲۸(۰/۰۷)
	III	۴۰	۱۶(۰/۰۷)	۱۷(۰/۰۶)	۲۱(۰/۰۵)	۲۳(۰/۰۴)	۱۸(۰/۰۹)	۱۸(۰/۰۹)	۱۸(۰/۰۹)	۱۸(۰/۰۹)
	IV	۴۰	۴۰(۰/۰۵)	۳۸(۰/۰۴)	۳۸(۰/۰۴)	۳۹(۰/۰۳)	۸۴(۰/۰۴)	۶۹(۰/۰۵)	۶۳(۰/۰۵)	۵۷(۰/۰۵)
	CLASIC	۴۰	۱۰(۰/۰۹)	۹(۰/۰۹)	۱۱(۰/۰۷)	۱۱(۰/۰۶)	>۱۰۰	>۱۰۰	۶۴(۰/۰۵)	۸۱(۰/۰۴)
Geometric	I	۴۰	۵(۵)	۳(۲)	۶(۶)	۳(۲)	۲۰(۲۱)	۱۹(۲۰)	۲۸(۲۴)	۲۷(۲۳)
	II	۴۰	۱۰(۱۲)	۴(۵)	۱۱(۱۱)	۴(۵)	۲۶(۲۴)	۲۷(۲۵)	۳۴(۲۷)	۳۴(۲۶)
	III	۴۰	۵(۴)	۳(۲)	۶(۵)	۳(۲)	۲۳(۱۹)	۲۲(۱۹)	۳۴(۲۵)	۳۴(۲۵)
	IV	۴۰	۱۸(۱۹)	۲۴(۲۳)	۲۲(۲۵)	۲۵(۳۱)	۴۵(۲۷)	۴۳(۲۷)	۴۹(۲۸)	۴۷(۲۷)
	CLASIC	۴۰	۸۳(۷۶)	۸۹(۵۶)	۸۱(۲۷)	۸۸(۵۰)	۵۰(۲۷)	۴۹(۲۷)	۵۰(۲۷)	۵۰(۲۷)

براساس مقدار α مقادیر مطلوب ARL متفاوت است. اگر متوسط طول دنباله محاسبه شده در جداول ارائه شده به مقادیر اسمی (مطلوب) نزدیکتر باشد نشان از توان بیشتر نمودار پیشنهادی در کشف نقاط خارج از کنترل می‌باشد. مقادیر ارائه شده در پرانتز نشان دهنده انحراف معیار متوسط طول دنباله‌های به دست آمده در تکرار شبیه‌سازی می‌باشد. برای مثال فرض کنید $\alpha = ۰/۰۵$ باشد ARL اسمی برابر با عدد ۲۰ است. در روش محاسبه متوسط طول دنباله از روش هندسی، نمودارهای بوت استرپ جمع تجمعی T^2 هتلینگ عملکرد بهتری دارند. در حالت هندسی نمودار جمع تجمعی T^2 هتلینگ، الگوریتم شماره ۴ در مقایسه با سایر الگوریتم‌ها و همچنین روش کلاسیک وضعیت مطلوبتری دارد. به لحاظ توان شناسایی نقاط خروج از کنترل بعد از این الگوریتم، الگوریتم‌های ۱ و ۳ قرار می‌گیرند. در حالت هندسی، نمودار جمع تجمعی برداری در مقایسه با نمودار جمع تجمعی T^2 هتلینگ بهتر نیست و نتایج شبیه‌سازی نشان دهنده توان نزدیک الگوریتم‌های ۱، ۳ و ۴ می‌باشد. در مجموع در روش دوجمله‌ای، نمودارها بهتر عمل می‌کنند. محاسبه متوسط طول دنباله از روش هندسی در نمودار جمع تجمعی T^2 هتلینگ عملکرد بهتری دارد.

با افزایش اندازه زیرگروه‌ها از $n = ۵$ به $n = ۱۰$ مقادیر ARL به مقدار اسمی نزدیکتر شده است. در واقع، با افزایش اندازه نمونه نتایج شبیه‌سازی بهتر شده است. همچنین با افزایش تعداد نمونه‌ها از $m = ۱۵$ به $m = ۳۰$ مقادیر ARL در همه توزیع‌ها افزایش یافته و به مقدار اسمی نزدیک شده است. با افزایش تعداد نمونه‌ها، برآورد پارامترهای فرآیند دقیق‌تر به دست می‌آید و در نتیجه نمودارها عملکرد بهتری خواهد داشت.

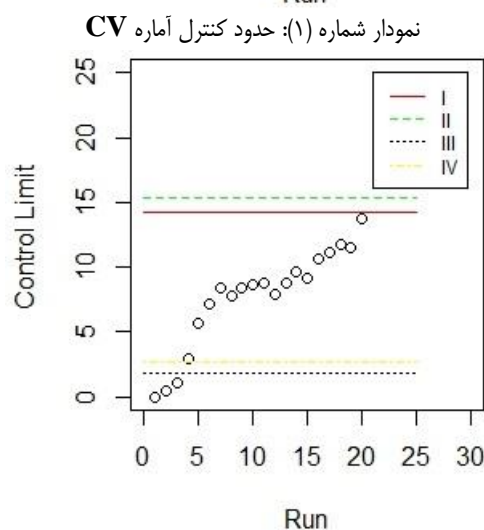
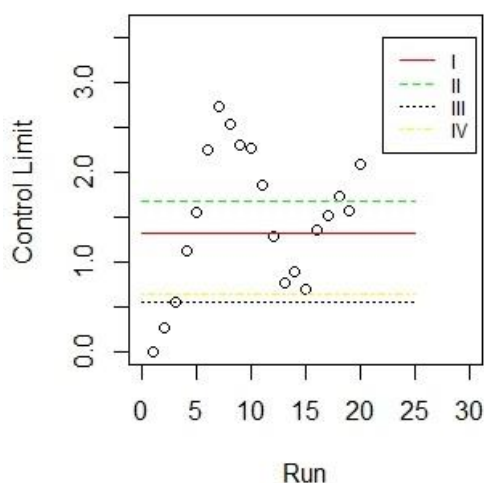
برای تولید شکر از چغندر، عوامل متعددی بر فرآیند تولید تاثیرگذار است. ابتدا شربتی از چغندر بدست می‌آید و سپس شربت طی یک فرآیند شیمیایی تبدیل به شکر می‌شود. بریکس و pH شربت از جمله مهمترین متغیرهایی هستند که در کیفیت شکر به دست آمده از شربت چغندر تاثیرگذار هستند. بریکس میزان مواد جامد در محلول شربت است. از کارخانه قند اصفهان در $m = ۲۰$ روز متوالی و در هر روز $n = ۶$ بار میزان بریکس و pH شربت رقیق اندازه‌گیری و ثبت شد. آماره‌های جمع تجمعی T^2 هتلینگ (COT) و جمع تجمعی برداری (CV) محاسبه و در جدول ۱۳ ارائه شده همچنین جدول ۱۴ مقادیر حدود کنترل بدست آمده از الگوریتم ارائه شده در بخش ۳ با $\alpha = ۰/۰۵$ را نشان می‌دهد.

جدول شماره (۱۳): مقادیر میانگین و آماره نمونه‌های کارخانه قند اصفهان

m	\bar{X}_1	\bar{X}_2	CV	COT
۱	۱۷/۱۳	۸/۵۸	۰	۰
۲	۱۸/۰۸	۸/۶۵	۰/۲۶	۰/۴۶
۳	۱۸	۸/۴۳	۰/۵۴	۱/۱۱
۴	۱۷/۱۳	۸/۱۶	۱/۱۲	۲/۹۴
۵	۱۹/۱۶	۸/۷۱	۱/۵۵	۵/۶۰
۶	۱۸/۶۸	۸/۵۸	۲/۲۴	۷/۱۸
۷	۱۸/۴۳	۸/۶۸	۲/۷۳	۸/۳۸
۸	۱۷/۵۱	۸/۶۰	۲/۵۳	۷/۷۰
۹	۱۷/۳۶	۸/۸۸	۲/۲۹	۸/۳۴
۱۰	۱۷/۴۳	۸/۸۸	۲/۲۵	۸/۶۷
۱۱	۱۶/۸۱	۸/۸۰	۱/۸۴	۸/۷۲
۱۲	۱۶/۸۸	۸/۶۵	۱/۲۷	۷/۸۶
۱۳	۱۶/۰۳	۸/۷۳	۰/۷۵	۸/۷۳
۱۴	۱۵/۹۵	۸/۷۱	۰/۸۸	۹/۶۷
۱۵	۱۶/۶۶	۸/۶۳	۰/۶۹	۹/۱۸
۱۶	۱۵/۸۳	۸/۸۱	۱/۳۵	۱۰/۶۴
۱۷	۱۶/۱۸	۸/۶۰	۱/۵۲	۱۱/۰۹
۱۸	۱۶/۱۶	۸/۵۳	۱/۷۲	۱۱/۶۹
۱۹	۱۶/۷۳	۸/۴۸	۱/۵۶	۱۱/۵۴
۲۰	۱۶/۵۳	۸/۱۵	۲/۰۸	۱۳/۷۶

جدول شماره (۱۴) مقادیر حدود کنترل

الگوریتم	CV	COT
I	۱/۳۰	۱۴/۱۱
II	۱/۶۴	۱۵/۰۵
III	۰/۵۲	۱/۸۰
IV	۰/۶۳	۲/۶۲



نمودار شماره (۲): حدود کنترل آماره COT

نمودار ۱ و نمودار ۲ نشان دهنده حدود کنترل به دست آمده و نقاط مثال واقعی براساس آماره های CV و COT می باشد. که نشان می دهد الگوریتم شماره دو برای هر دو آماره کران بزرگتر و الگوریتم شماره سه کوچکترین کران را داشته است. در این مقاله برای اولین بار استفاده از روش های باز نمونه گیری در نمودارهای کنترل جمع تجمعی چندمتغیره ارائه شده است. به دلیل پیچیدگی ساختار آماره نمودار کنترل جمع تجمعی و در نتیجه نامعلوم بودن توزیع آن، حدود نمودار با شبیه سازی به دست می آید. نمودارهای کنترل جمع تجمعی بوت استرپ چندمتغیره به دلیل عدم نیاز به معلوم بودن توزیع آماره کنترل، با استفاده از ایده فاصله اطمینان صدکی بوت استرپ به عنوان کران های نمودار کنترل جمع تجمعی قابل محاسبه است. نمودارهای کنترل بوت استرپ جمع تجمعی چند متغیره به فرض نرمال بودن مشاهدات احتیاج ندارند. از طرف دیگر، نمودارهای کنترل بوت استرپ جمع تجمعی به اندازه نمونه بزرگ احتیاج ندارد و با اندازه نمونه کوچک نیز کارایی خوبی دارد. نمودارهای کنترل بوت استرپ جمع تجمعی در شرایط مختلف مانند معلوم یا نامعلوم بودن پارامترهای فرآیند، بر اساس معیار ARL کارایی خوبی دارند. هدف این مقاله علاوه بر نشان دادن کارایی بالای روش های باز نمونه گیری در به دست آوردن حدود کنترل و شناسایی نقاط خارج از کنترل، معرفی الگوریتم های مختلف جهت استفاده در کنترل کیفیت فرآیند است. همانطور که از نتایج شبیه سازی واضح است الگوریتم ها دارای عملکرد متفاوتی هستند. نتایج شبیه سازی نشان داد، الگوریتم ها برای دو نمودار جمع تجمعی T^2 هتلینگ و جمع تجمعی برداری دارای عملکرد متفاوتی هستند.

سپاسگزاری

نویسندگان بر خود لازم میدانند از دانشگاه آزاد اسلامی واحد شاهین شهر بابت حمایت‌ها و پشتیبانی مالی در انجام این طرح پژوهشی تشکر و قدردانی کنند

۴- منابع

1. Page, E. S. (1954). Continuous Inspection Schemes, *Biometrika*. 41, 100-114.
2. Montgomery, C. D. (2006). *Introduction to Statistical Quality Control*, 6th Edition. John Wiley & Sons.
3. Chatterjee, S., and Qiu, P. (2009). Distribution-free cumulative sum control charts using bootstrap-based control limits. *the Annals of Applied Statistics*, 3(1), 349-369.
4. Mood, A. M., Graybill, F. A., and Boes, D. C. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics* (3rd ed.), New York: McGraw-Hill.
5. Woodall, W. H., and Ncube, M. M. (1985). *Multivariate CUSUM Quality-Control* (3rd ed.), New York: McGraw-Hill.
6. Healy, J. D. (1987). A Note on Multivariate CUSUM Procedures, *Technometrics*, 29 (4).
7. Crosier, Ronald. (1988). Multivariate Generalizations of Cumulative Sum Quality-Control Schemes, *Technometrics*, 30:3, 291-303.
8. Pignatiello, J. J., and Runger, G. C. (1990). Comparisons of Multivariate CUSUM charts, *J. Qual. Technol.* 22, pp. 173-186.
9. Nagi, H., and Zhang, J. (2001). Multivariate Cumulative Sum Control charts based on Projection pursuit, *Statist. Sinica* 11, pp. 747-766.
10. Duncan, A. J. (1974) *Quality Control and Industrial Statistics* (4th ed.), Homewood, IL: Richard D. Irwin.
11. Hotelling, H. (1947). Multivariate Quality Control. Illustrated by the Air Testing of Sample Bombsights, "in *Techniques of Statistical Analysis*, eds. C. Eisenhart, M. W. Hastay, and W. A. Wallis, New York: McGraw-Hill, 111-184.
12. Mahmoud, M. A., and Maravelakis, P. E. (2013). The Performance of the Multivariate CUSUM Control charts with Estimated Parameters. *Comm. Statist. Simulation Comput*, 83. 72.
13. Qiu, P., and Hawkins, D. (2001). A Rank-Based Multivariate Cusum Procedure, *Technometrics*, 43:2, 120-132.